1.3.1 Množiny I

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Cílem následujících hodin je spíše než seznámení s pojmy teorie množin, nácvik pochopení obsahu definic. Proto nejsou definice dokumentovány na řešených příkladech. Cíle však můžete dosáhnout pouze tím, že budete trvat na tom, aby studenti zkusili příklady řešit samostatně. Většina studentů však není zvyklá zkoušet vlastní interpretaci, takže to nepůjde snadno.
Ke každé definici jsou minimálně dva příklady – první příklad využívá přirozené množiny, které by se měly vyskytovat v každé třídě a z hlediska žáků jsou jednodušší, protože nevyžadují interpretaci matematických zápisů, které jsou největším problémem u druhých příkladů. Výčtová řešení takových příkladů jsou samozřejmě odlišná v každé třídě. Charakteristické vlastnosti založené na jménech používám schválně.
Pokud máte málo času, můžete druhé příklady vynechat, čímž tuto a následující poloviční hodinu stihnete za 45 minut (žáci tím však nezískají cvik ve čtení matematických zápisů).

- Teorie množin na VŠ patří spíše k náročnějším (zkratka TEMNO).
- Dnes základ matematiky.
- Pořádné zavedení pojmu množiny je obtížné.

Pro nás: **Množina je souhrn nějakých předmětů (prvků množiny)**.

Píšeme:
- $x \in A$ - *x* je prvkem množiny *A*,
- $x \notin A$ - *x* není prvkem množiny *A*.

Pedagogická poznámka: Žáci mají v ZŠ zafixováno „*x* náleží“.

Množiny podle počtu prvků:
- konečné (množina žáků 1.B),
- nekonečné (množina všech přirozených čísel).

Prázdná množina nemá žádný prvek, píšeme $C = \emptyset$, nebo jen $\emptyset$.

Zadávání množin:
a) výčtem: $A = \{1;2;3\}$
- nejde u nekonečných množin,
- nezáleží na pořadí prvků ve výčtu $\Rightarrow$ více možností: $A = \{1;2;3\}$, $A = \{1;3;2\}$,
- každý prvek se uvádí právě jednou $\Rightarrow$ zápis $B = \left\{1;5;3;\frac{10}{2}\right\}$ je špatný, 5 je tam dvakrát.

b) charakteristickou vlastností: Do množiny zahrneme prvky s uvedenou vlastností.
$A = \{x \in N; x \le 3\}$ (množina přirozených čísel menších nebo rovných 3)

K je množina všech kluků v 1.B, kteří mají brýle.

Př. 1: Vyjádři výčtem množinu *H* všech holek ve třídě, jejichž jméno začíná na samohlásku.

$H = \{\text{Aneta, Eva}\}$.

Pedagogická poznámka: Nejčastějším řešením jsou množiny $H = \{2\}$, kde číslo udává počet holek, které by měla obsahovat samotná množina. Nezbývá než připomenout, že se nikdy nemluvilo o tom, že by množiny mohly obsahovat pouze čísla.

Př. 2: Vyjádři výčtem množinu $B = \{x \in N; x < 6\}$.

$B = \{x \in N; x < 6\}$ $\Rightarrow$ přirozená čísla menší než 6 $\Rightarrow$ $B = \{1;2;3;4;5\}$.

Př. 3: Následující množiny zadané charakteristickou vlastností uveď výčtem.

a) $D = \{x \in Z; x = -x\}$ b) $E = \left\{x \in Q; \sqrt{x^2} > |x|\right\}$

c) $F = \{x \in Z; |x| > x\}$

a) $D = \{x \in Z; x = -x\}$ $\Rightarrow$ celá čísla sama k sobě opačná $\Rightarrow$ $D = \{0\}$ (Množina *D* obsahuje číslo 0, není tedy prázdná).

b) $E = \left\{x \in Q; \sqrt{x^2} > |x|\right\}$ $\Rightarrow$ víme, že platí $\sqrt{x^2} = |x|$ $\Rightarrow$ $E = \{\ \} = \emptyset$ (Množina *E* neobsahuje žádné číslo, nazývá se prázdná množina).

c) $F = \{x \in Z; |x| > x\}$ $\Rightarrow$ podmínka platí pro záporná čísla $\Rightarrow$ $F = \{-1;-2;-3;...\}$ (nekonečná množina, nemá konečný počet prvků, zápis výpisem není zcela korektní).

Pedagogická poznámka: Zejména v bodě a) dělají žáci chyby (zahrnují do množiny buď kladná nebo častěji záporná čísla). Chybu by snadno odhalili, kdyby si své řešení zpětně vyzkoušeli.

V hodině je tlačím do toho, aby si (pokud si nejsou jistí) zkusili napsat nějaký nápad, který potom zpětně ověří. I v případě, že během ověřování zjistí, že jejich nápad byl špatný, je to určitě krok vpřed, protože často právě během ověřování špatného původního nápadu objeví správné řešení.

Př. 4: Následující množiny zadané výčtem uveď charakteristickou vlastností.

a) $A = \{1;2;3\}$ b) $C = \emptyset$

c) $G = \{-2;-1;0;1;2\}$

Pro každý bod existuje více možností, například:

a) $A = \{1;2;3\}$ $A = \{x \in N; x < 4\}$, $A = \{x \in Z; 1 \le x \le 3\}$, …

b) $C = \emptyset$ $C = \{x \in R; x = x + 1\}$, množina všech růžových nosorožců ve

třídě, …
c) $G=\{-2;-1;0;1;-2\}$ $G=\{x\in Z;|x|\leq 2\}$, $G=\{x\in Z;-3<x<3\}$,...

Pedagogická poznámka: Pro některé žáky je úkol těžký, protože má více řešení (na což nejsou zvyklí). Upozorňuji proto už na začátku, že nemají hledat jediné správné řešení, ale jedno z mnoha správných řešení.

Pedagogická poznámka: V bodě b) u množiny *C* zaslouží pochvalu každý, kdo vymyslí samostatně něco originálního (nematematického). Pokud máte čas, řekněte něco sami, čímž byste měli odzátkovat nápady žáků ve třídě.

Podmnožina ($\subseteq$)
Množina *B* je podmnožinou množiny *A*, právě když každý prvek *B* je zároveň prvkem *A*.
Píšeme $B\subseteq A$.

Př. 5: Je dána množina $A=\{1;2;3;\pi\}$. Urči, které z následujících množin jsou jejími podmnožinami (a zapiš výsledek jedním ze znaků $\subseteq$ nebo $\not\subseteq$).
a) $A=\{1;2;3;\pi\}$ b) $B=\{1;\ \pi\}$
c) $C=\{0;1\}$ d) $D=\{\ \}=\emptyset$

a) $A=\{1;2;3;\pi\}$ $A\subseteq A$ (Každá množina je podmnožinou sama sebe)
b) $B=\{1;\ \pi\}$ $B\subseteq A$
c) $C=\{0;1\}$ $C\not\subseteq A$ (0 není v *A*)
d) $D=\{\ \}=\emptyset$ $D\subseteq A$ (Prázdná množina je podmnožinou libovolné množiny)

Pedagogická poznámka: Zajímavé jsou body a) a d). Hlavně bod a) je důležitý. Studenti neoznačí *A* za podmnožinu *A*, protože mají představu (bez racionálního důvodu), že podmnožina *A* musí být něco jiného než množina *A*. Tato představa je pro ně důležitější než definice, podle které by mohli rozhodnout správně (oni se o to ani nepokusí). Diskuse nad špatným řešením by měla zdůrazňovat fakt, že při řešení neuspěli, protože místo uplatňování pravidla dali na neodůvodněné představy.

Dodatek: Kromě znaku $\subseteq$ se pro podmnožinu občas používá také znak $\subset$. Správně podle normy je však mezi oběma znaky rozdíl, kde znak $\subseteq$ znamená libovolnou podmnožinu, znak $\subset$ podmnožinu vlastní – podmnožinu, která není rovna původní množině (můžeme tedy psát $A\subseteq A$, ale nemůžeme psát $A\subset A$). Použití znaků $\subseteq$ a $\subset$ tak v podstatě odpovídá znakům pro ostrou a neostrou nerovnost $\leq$ a $<$.

Př. 6: Vypiš všechny podmnožiny množiny $A=\{1;2;3;\pi\}$.

Dobré vypisovat podle počtu prvků, systematicky:
- 0 prvků: $\emptyset$ (podmnožina každé množiny),
- 1 prvek: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{\pi\}$,

- 2 prvky: $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;\pi\}$, $\{2;3\}$, $\{2;\pi\}$, $\{3;\pi\}$,
- 3 prvky: $\{2;3;\pi\}$, $\{1;3;\pi\}$, $\{1;2;\pi\}$, $\{1;2;3\}$,
- 4 prvky: $A=\{1;2;3;\pi\}$.

Pedagogická poznámka: Po chvíli poradím studentům, že by měli najít 16 podmnožin. Je zajímavé, komu a jakým způsobem se podaří najít všechny. Jinak příklad je dobrou příležitostí k nácviku systematické práce.

Př. 7: Jednoprvkových i tříprvkových podmnožin množiny $A=\{1;2;3;\pi\}$ je stejně. Proč? Pro kolikaprvkové podmnožiny množiny $B=\{1;2;3;4;5;6\}$ bude platit to samé?

Podmnožiny si můžeme zapsat do tabulky:

tříprvková	$\{2;3;\pi\}$	$\{1;3;\pi\}$	$\{1;2;\pi\}$	$\{1;2;3\}$
jednoprvková	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{\pi\}$

V tabulce vidíme, že ke každé tříprvkové podmnožině existuje jednoprvková podmnožina, která obsahuje ten prvek celé množiny *A*, který chybí v tříprvkové podmnožině $\Rightarrow$ tím, že vytvoříme tříprvkovou podmnožinu vlastně vytvoříme i jednoprvkovou podmnožinu (prvek, který jsme nezařadili do tříprvkové podmnožiny).
U šestiprvkové množiny $B=\{1;2;3;4;5;6\}$ bude stejný vztah platit pro množiny jednoprvkové a pětiprvkové. Další dvojicí budou dvouprvkové a čtyřprvkové množiny.

Shrnutí: Použití definice a správnost řešení je dobré testovat na konkrétních případech.